ＥＡ　一般位相と解析学　講義報告[1]

２００８年5月１８日（日）　１４：００−１６：３０

距離空間における開球による開集合の定義が、位相空間の開集合系の公理を満たすことを示した。次に、セミ・ノルムを定義し、セミ・ノルム空間に位相を入れた。最後にいくつかのセミ・ノルムの具体例について扱った。

1　開集合系・位相構造

1.1　開集合系

練習問題 1.1. (X, d) を距離空間とする。X の部分集合 O が開集合であるとは、

$$\forall x \in O,\ \exists r > 0 \quad \textit{such that} \quad B_r(x) \subset O$$

を満たすことである。ただし、$B_r(x)$ は x を中心とする半径 r の開球すなわち、

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

とする。$\mathfrak{O}(X) \subset 2^X$ を X の開集合全体の集合とするとき、次の性質を満たすことを示せ。

1. $X, \emptyset \in \mathfrak{O}(X)$
2. $O_1, O_2 \in \mathfrak{O}(X) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}(X)$
3. $O_\lambda \in \mathfrak{O}(X)\ (\forall \lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}(X)$
4. $B_r(x) \in \mathfrak{O}(X) \quad (\forall x \in X,\ \forall r > 0)$

定義 1.1 (開集合系). S を空でない集合とする。S の部分集合の族 $\mathfrak{O}$ が次の条件を満たすとき、$\mathfrak{O}$ を S の一つの**開集合系**と言う。

O.1) $S, \emptyset \in \mathfrak{O}$

O.2) $O_1, O_2 \in \mathfrak{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$

O.3) $O_\lambda \in \mathfrak{O}\ (\forall \lambda \in \Lambda) \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$

S に一つの開集合系 $\mathfrak{O}$ が与えられたとき、S に $\mathfrak{O}$ による**位相**が与えられたと言う。これを短縮して、$(S, \mathfrak{O})$ を**位相空間**と呼ぶ。$U \in \mathfrak{O}$ を $\mathfrak{O}-$ **開集合**と言う。$\mathfrak{O}$ が固定され紛れのないときは、S を単に位相空間と呼び、$U \in \mathfrak{O}$ を開集合と言う。

練習問題 1.2 (距離空間でない開集合系). $\mathfrak{F}(X)$ を空でない集合 X の有限集合全体とするとき、

$$\mathfrak{O} = \{X \setminus F \mid F \in \mathfrak{F}(X)\} \cup \{\emptyset\}$$

は X の開集合系になることを示せ。

[1] 数学工房　http://www.sugakukobo.com/

定義 1.2 (セミ・ノルム). E を $\mathbb{K}$ 上の線型空間とするとき、E 上の実数値関数 $p: E \to \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき、p を E 上の**セミ・ノルム**という。

S.1) $p(v) \geq 0 \quad for\ \forall v \in E$

S.2) $p(\lambda v) = |\lambda| p(v) \quad for\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall v \in E$

S.3) $p(v + w) \leq p(v) + p(w) \quad for\ \forall v, w \in E$

このとき、(E, p) を**セミ・ノルム空間**を呼ぶ。

練習問題 1.3. (E, p) をセミ・ノルム空間とする。

1. 任意の $v_0 \in E$ を固定するとき、$r > 0$ に対して、

$$W(v_0, r) = \{v \in E \mid p(v - v_0) < r\}$$

とするとき、$W(v_0, r)$ は凸図形になることを示せ。

2.

$$\mathfrak{O}_p(E) = \{O \in 2^E \mid \forall u \in O,\ \exists r > 0\ such\ that\ W(v, r) \subset O\}$$

とするとき、$\mathfrak{O}_p(E)$ は E の開集合系になることを示せ。

練習問題 1.4.

1. E を $\mathbb{R}$ 上の線形空間、$\phi: E \to \mathbb{R}$ を線形形式とするとき、

$$p_\phi(v) = |\phi(v)| \quad for\ \forall v \in E$$

は E 上のセミ・ノルムになることを示せ。

2. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2$ が線形独立なとき、

$$p(v) = |\langle v, c_1 \rangle| + |\langle v, c_2 \rangle|$$

は $\mathbb{R}^2$ 上のセミ・ノルムになることを示せ。

練習問題 1.5. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合、$\mathcal{K}(\Omega)$ を Ω に含まれるコンパクト集合の全体とする。任意の $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ に対して、

$$\|f\|_K = \sup\{|f(x)| \mid x \in K\} \quad for\ \forall f \in C(\Omega)$$

とするとき、

1. $\|\ \|_K : C(\Omega) \to \mathbb{R}$ は、セミ・ノルムで、ノルムではないことを示せ。
2. 任意の $f_0 \in C(\Omega)$ に対して、$W(f_0, r)$ を具体的に表せ。

記録 by J.S